# 10 (базовый уровень, время – 4 мин)

**Тема**: Кодирование данных, комбинаторика, системы счисления.

**Что нужно знать**:

* русский алфавит
* принципы работы с числами, записанными в позиционных системах счисления
* если слово состоит из L букв, причем есть n1 вариантов выбора первой буквы, n2 вариантов выбора второй буквы и т.д., то число возможных слов вычисляется как произведение

N = n1 · n2 · … · nL

* если слово состоит из L букв, причем каждая буква может быть выбрана n способами, то число возможных слов вычисляется как N = nL

### Пример задания:

**Р-07.** *Вася составляет 3-буквенные слова, в которых есть только буквы В, Е, С, Н , А, причём буква А используется в каждом слове хотя бы 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?*

**Решение (способ 1):**

1. буква А может стоять на одном из трёх мест: А\*\*, \*А\*, \*\*А, где \* обозначает любой из пяти символов
2. в каждом случае в остальных двух позициях может быть любая из пяти букв
3. для шаблона А\*\* получаем (перемножая количество вариантов для каждой позиции)

1 · 5 · 5 = 25 слов

1. для шаблона \*А\* тоже получим 25 слов, но нужно учесть, что все слова, в который первая буква А мы уже подсчитали, поэтому считаем только слова, где на первом место стоит какая-то другая буква (В, Е, С или Н)
2. отсюда находим, что шаблон \*А\* добавляет 4 · 1 · 5 = 20 новых слов
3. рассматривая шаблон \*\*А, не учитываем уже подсчитанные слова, в которых буква А есть на первом или втором местах, количество новых слов – 4 · 4 · 1 = 16
4. всего получается 25 + 20 + 16 = 61 слово
5. Ответ: 61.

**Решение (способ 2):**

1. количество слов с буквой А можно вычислить как разность между количеством всех возможных слов и количеством слов, в которых нет буквы А
2. количество всех слов 5 · 5 · 5 = 53 = 125 (на любой из 3-х позиций может стоять любая из 5 букв)
3. количество слов, в которых нет буквы А равно 4 · 4 · 4 = 43 = 64 (на любой из 3-х позиций может стоять любая из 4 букв, кроме А)
4. получается 125 – 64 = 61 слово, в котором есть буква А (она или несколько)
5. Ответ: 61.

### Ещё пример задания:

**Р-06.** *Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причём буква С используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?*

**Решение:**

1. буква С может стоять на одном из пяти мест: С\*\*\*\*, \*С\*\*\*, \*\*С\*\*, \*\*\*С\* и \*\*\*\*С, где \* обозначает любой из оставшихся трёх символов
2. в каждом случае в остальных четырёх позициях может быть любая из трёх букв Л, О, Н, поэтому при заданном расположении буквы С имеем 34 = 81 вариант
3. всего вариантов 5 · 81 = 405.
4. Ответ: 405.

### Ещё пример задания:

**Р-05.** *Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в четырёхбуквенном алфавите {A, C, G, T}, которые содержат ровно две буквы A?*

**Решение (вариант 1, перебор):**

1. рассмотрим различные варианты слов из 5 букв, которые содержат две буквы А и начинаются с А:

АА\*\*\* А\*А\*\* А\*\*А\* А\*\*\*А

Здесь звёздочка обозначает любой символ из набора {C, G, T}, то есть один из трёх символов.

1. итак, в каждом шаблоне есть 3 позиции, каждую из которых можно заполнить тремя способами, поэтому общее число комбинаций (для каждого шаблона!) равно 33 = 27
2. всего 4 шаблона, они дают 4 · 27 = 108 комбинаций
3. теперь рассматриваем шаблоны, где первая по счёту буква А стоит на второй позиции, их всего три:

\*АА\*\* \*А\*А\* \*А\*\*А

они дают 3 · 27 = 81 комбинацию

1. два шаблона, где первая по счёту буква А стоит на третьей позиции:

\*\*АА\* \*\*А\*А

они дают 2 · 27 = 54 комбинации

1. и один шаблон, где сочетание АА стоит в конце

\*\*\*АА

они дают 27 комбинаций

1. всего получаем (4 + 3 + 2 + 1) · 27 = 270 комбинаций
2. ответ: 270.

**Решение (вариант 2, использование формул комбинаторики):**

1. в последовательности из 5 символов нужно использовать ровно две буквы А и три символа, не совпадающих с А, которые обозначим звездочкой
2. сначала найдём количество перестановок из двух букв А и трёх звёздочек
3. используем формулу для вычисления числа перестановок с повторениями; для двух разных символов она выглядит так:



Здесь – количество букв А, – количество звёздочек и восклицательный знак обозначает *факториал* натурального числа, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до : 

1. в нашем случае  и , так что получаем



1. теперь разберёмся со звёздочками: вместо каждой из них может стоять любой из трёх символов (кроме А), то есть на каждую из 10 перестановок мы имеем 33 = 27 вариантов распределения остальных символов на месте звёздочек
2. таким образом, получаем всего 10 · 27 = 270 вариантов.
3. ответ: 270.

### Ещё пример задания:

**Р-04.** *Сколько слов длины 5, начинающихся с гласной буквы, можно составить из букв Е, Г, Э? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.*

**Решение:**

1. первая буква слова может быть выбрана двумя способами (Е или Э), остальные – тремя
2. общее число различных слов равно 2\*3\*3\*3\*3 = 162
3. ответ: 162.

**Решение (через формулы, А.Н. Носкин):**

1. Дано слово длиной 5 символов типа \*\*\*\*\*, где красная звездочка – гласная буква (Е или Э), а черная буква любая из трёх заданных.
2. Общая формула количества вариантов:

*N = M L*, где *М* – мощность алфавита, а *L* – длина кода.

1. Так как положение одной из букв строго регламентировано (знак умножения в зависимых событиях), то формула всех вариантов примет вид: *N = M*1*L*1 *∙ M*2*L2*,
2. Тогда *M*1 *=* 2 (алфавит гласных букв), а *L*1 *=* 1 (только 1 позиция в слове).

*M*2 *=* 3 (алфавит всех букв), а *L*2 *=* 4 (оставшиеся 4 позиции в слове).

1. В итоге получаем: *N =* 21 ∙ 34 = 2 ∙ 81 = 162.
2. ответ: 162.

### Ещё пример задания:

**Р-03.** *Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:*

**1. КККК**

**2. КККЛ**

**3. КККР**

**4. КККТ**

**……**

*Запишите слово, которое стоит на 67-м месте от начала списка.*

**Решение:**

1. самый простой вариант решения этой задачи – использование систем счисления; действительно, здесь расстановка слов в алфавитном порядке равносильна расстановке по возрастанию чисел, записанных в четверичной системе счисления (основание системы счисления равно количеству используемых букв)
2. выполним замену К→0, Л→1, Р→2, Т→3; поскольку нумерация слов начинается с единицы, а первое число КККК→0000 равно 0, под номером 67 будет стоять число 66, которое нужно перевести в четверичную систему: 66 = 10024
3. Выполнив обратную замену (цифр на буквы), получаем слово ЛККР.
4. Ответ: ЛККР.

### Ещё пример задания:

**Р-02.** *Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.*

*Вот начало списка:*

**1. ААААА**

**2. ААААО**

**3. ААААУ**

**4. АААОА**

**……**

*Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.*

**Решение (1 способ, перебор с конца):**

1. подсчитаем, сколько всего 5-буквенных слов можно составить из трех букв;
2. очевидно, что есть всего 3 однобуквенных слова (А, О, У); двух буквенных слов уже 3×3=9 (АА, АО, АУ, ОА, ОО, ОУ, УА, УО и УУ)
3. аналогично можно показать, что есть всего 35 = 243 слова из 5 букв
4. очевидно, что последнее, 243-е слово – это УУУУУ
5. далее идём назад: предпоследнее слово УУУУО (242-е), затем идет УУУУА (241-е) и, наконец, УУУОУ (240-е)
6. Ответ: УУУОУ.

|  |
| --- |
| **Возможные ловушки и проблемы**:   * + хорошо, что требовалось найти слово, которое стоит близко к концу списка; если бы было нужно, скажем, 123-е слово, работы было бы значительно больше |

**Решение (2 способ, троичная система, идея М. Густокашина):**

1. по условию задачи важно только то, что используется набор из трех разных символов, для которых задан порядок (алфавитный); поэтому для вычислений можно использовать три любые символа, например, цифры 0, 1 и 2 (для них порядок очевиден – по возрастанию)
2. выпишем начало списка, заменив буквы на цифры:

**1. 00000**

**2. 00001**

**3. 00002**

**4. 00010**

**……**

1. это напоминает (в самом деле, так оно и есть!) числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.
2. тогда легко понять, что 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления
3. переведем 239 в троичную систему: 239 = 222123
4. заменяем обратно цифры на буквы: 22212 → УУУОУ
5. Ответ: УУУОУ.

|  |
| --- |
| **Возможные ловушки и проблемы**:   * + нужно помнить, что нумерация в задаче начинается с 1, а числа в троичной системе – с нуля, поэтому для получения 240-го элемента списка нужно переводить в троичную систему число 240-1 = 239. |

**Решение (3 способ, закономерности в чередовании букв, И.Б. Курбанова):**

1. подсчитаем, сколько всего 5-буквенных слов можно составить из трех букв:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | А | А | А | А | А |
| **2** | А | А | А | А | О |
| **3** | А | А | А | А | У |
| **4** | А | А | А | О | А |
| **…** | … | … | … | … | … |
| **...** |  |  |  |  |  |
| **…** |  |  |  |  |  |
| **240** | **У** | **У** | **У** | **О** | **У** |
| **241** | У | У | У | У | А |
| **242** | У | У | У | У | О |
| **243** | У | У | У | У | У |

35 = 243 слова; 240-ое место – четвертое с конца;

1. так как слова стоят в алфавитном порядке, то первая треть (81 шт) начинаются с «А», вторая треть (тоже 81) – с «О», а последняя треть – с «У», то есть первая буква меняется через 81 слово
2. аналогично:

* 2-я буква меняется через 81/3 = 27 слов;
* 3-я буква – через 27/3 = 9 слов;
* 4-я буква – через 9/3 = 3 слова и
* 5-я буква меняется в каждой строке.

1. из этой закономерности ясно, что
   * на первой позиции в искомом слове будет буква «У» (последние 81 букв);
   * на второй – тоже буква «У» (последние 27 букв);
   * на третьей – тоже буква «У» (последние 9 букв);
   * на четвертой – буква «О» (т.к. последние три буквы «У», а перед ними 3 буквы «О»)%
   * на пятой – буква «У» (т.к. последние 3 буквы чередуются «А», «О», «У», а перед ними такая же последовательность).
2. Ответ: УУУОУ.

### Еще пример задания (автор – В.В. Путилов):

**Р-01.** *Все 5-буквенные слова, составленные из 5 букв А, К, Л, О, Ш, записаны в алфавитном порядке.*

*Вот начало списка:*

**1. ААААА**

**2. ААААК**

**3. ААААЛ**

**4. ААААО**

**5. ААААШ**

**6. АААКА**

**……**

*На каком месте от начала списка стоит слово ШКОЛА?*

**Решение:**

1. по аналогии с предыдущим решением будем использовать пятеричную систему счисления с заменой А → 0, К → 1, Л → 2, О → 3 и Ш → 4
2. слово ШКОЛА запишется в новом коде так: 413205
3. переводим это число в десятичную систему:

413205 = 4⋅54 + 1⋅53 + 3⋅52 + 2⋅51 = 2710

1. поскольку нумерация элементов списка начинается с 1, а числа в пятеричной системе – с нуля, к полученному результату нужно прибавить 1, тогда…
2. Ответ: 2711.

|  |
| --- |
| **Возможные ловушки и проблемы**:   * + нужно помнить, что список в задании начинается с 1, а числа в троичной системе – с нуля, поэтому для получения N-ой по счёту цепочки нужно переводить в троичную систему число N-1. |

### Еще пример задания:

**Р-00.** *Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в* ***обратном*** *алфавитном порядке. Вот начало списка:*

**1. УУУУУ**

**2. УУУУО**

**3. УУУУА**

**4. УУУОУ**

**……**

*Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.*

**Решение (2 способ, троичная система, идея М. Густокашина):**

1. по условию задачи важно только то, что используется набор из трех разных символов, для которых задан порядок (алфавитный); поэтому для вычислений можно использовать три любые символа, например, цифры 0, 1 и 2 (для них порядок очевиден – по возрастанию)
2. выпишем начало списка, заменив буквы на цифры так, чтобы **порядок символов был обратный алфавитный** (У → 0, О → 1, А → 2):

**1. 00000**

**2. 00001**

**3. 00002**

**4. 00010**

**……**

1. это напоминает (в самом деле, так оно и есть!) числа, записанные в троичной системе счисления в порядке возрастания: на первом месте стоит число 0, на втором – 1 и т.д.
2. тогда легко понять, что 240-м месте стоит число 239, записанное в троичной системе счисления
3. переведем 239 в троичную систему: 239 = 222123
4. заменяем обратно цифры на буквы, **учитывая обратный алфавитный порядок** (0 → У, 1 → О, 2 → А): 22212 → АААОА
5. Ответ: АААОА.