# 15 (повышенный уровень, время – 3 мин)

**Тема**: Графы. Поиск количества путей

**Что нужно знать**:

* если в город R можно приехать только из городов X, Y, и Z, то число различных путей из города A в город R равно сумме числа различных путей проезда из A в X, из A в Y и из A в Z, то есть

,

где  обозначает число путей из вершины A в некоторую вершину Q

* число путей конечно, если в графе нет циклов – замкнутых путей

### Пример задания:

**Р-03**.  *На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и проходящих через город В?*

А

Б

Г

Д

B

Ж

Е

И

К

М

**Решение:**

1. для того, чтобы оставить только маршруты, проходящие через вершину В, нужно представить граф в таком виде, «собрав его в пучок» около вершины В:

А

М

В

1. проведём сечение графа через вершину В:

А

Б

Г

Д

B

Ж

Е

И

К

М

1. обратим внимание на такой факт: если мы перешли через линию сечения из левой части в правую по ребру ГЕ или через вершину Ж, мы уже никак не попадём в вершину В (нет рёбер с «обратным направлением», поэтому эти маршруты запрещены; для более сложных случаев, когда такие рёбра с «обратным направлением» есть, нужно перерисовать граф (или провести сечение иначе) так, чтобы все вершины, ИЗ которых можно попасть в В, оказались слева от линии сечения
2. в данном случае выбрасывается вершина Ж, все связанные с ней рёбра, и ребро ГЕ:

А

Б

Г

Д

B

Е

И

К

М

1. дальше используем стандартный метод (см. разбор следующей задачи)
2. покажем только окончательный результат:

А

Б

Г

Д

B

Е

И

К

М

1

1

1

3

4

4

8

4

16

1. Ответ: 16.

### Ещё пример задания:

**Р-02**.  *На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?*

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

И

К

Л

**Решение:**

1. будем обозначать через NX количество различных путей из города А в город X
2. для города А есть только один маршрут – никуда не двигаться, поэтому NA = 1
3. для любого города X количество маршрутов NX можно вычислить как

Nx = Ny + … + Nz

где сумма взята по всем вершинам, из которых есть прямой путь в вершину X; например,

NЛ = NИ + NЖ + NК

1. около каждого города будем записывать количество маршрутов из А в этот город
2. начнем считать количество путей с начала маршрута – с города А:

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

И

К

Л

1

1. теперь находим те вершины, в которые можно попасть напрямую из уже рассмотренных вершин (пока – только из А), это Б и Г, для них тоже количество путей равно 1:

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

И

К

Л

1

1

1

1. теперь можно определить количество путей для В и Е; в В можно приехать только из А, Б и Г, а в Е – только из Г:

NВ = NА + NБ + NГ = 1 + 1 + 1 = 3

NЕ = NГ = 1

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

И

К

Л

1

1

1

3

1

1. теперь можно определить количество путей для Д, Ж и К; в Д можно приехать только из Б и В, в Ж – из В и Е, а в Е – только из Г:

NД = NБ + NВ = 1 + 3 = 4

NЖ = NВ + NЕ = 3 + 1 = 4

NК = NЕ­ = 1

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

И

К

Л

1

1

1

3

1

4

1

4

1. теперь можно определить количество путей для И, куда можно приехать только из Д (NИ = NД) и, наконец, для Л:

NЛ = NД + NИ + NЖ + NК = 13

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж

И

К

Л

1

1

1

3

1

4

1

4

4

13

1. Ответ: 13.

### Ещё пример задания:

**Р-01**.  *Города A, B, C и D связаны дорогами*. Известно, что существуют дороги между городами

*A и С, C и B (две дороги), A и B, C и D (две дороги), B и D. Сколькими различными способами можно проехать из города А в город D, не заезжая дважды в один город?*

**Решение:**

1. нарисуем граф, в котором множественные дороги из одного города в другой будем обозначать одной дугой и подписывать около неё количество дорог:

А

B

D

С

2

2

1. выпишем все маршруты, по которым можно ехать из A в D так, чтобы дважды не проезжать один и тот же город:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 1 | 1 2 | 1 2 2 | 1 2 1 |
| A → B → D | A → С → D | A → B → С → D | A → C → B → D |

1. теперь рассмотрим маршрут A → B → D; на всех участках только одна дорога, поэтому есть только один такой маршрут
2. для маршрута A → С → D: на первом участке только одна дорога, на втором – две, общее число маршрутов равно произведению этих чисел: 1\*2 = 2
3. аналогично находит количество различных путей по другим маршрутам

A → B → С → D: 1\*2\*2 = 4

A → C → B → D: 1\*2\*1 = 2

1. всего получается 1 + 2 + 4 + 2 = 9.
2. Ответ: 9.

### Еще пример задания:

**Р-00**.  *На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?*

Е

Г

В

А

К

Б

Д

Ж

И

**Решение (1 вариант, подстановки):**

1. начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К
2. будем обозначать через NX количество различных путей из города А в город X
3. общее число путей обозначим через N
4. по схеме видно, что NБ = NГ = 1
5. очевидно, что если в город X можно приехать только из Y, Z, то NX = NY + N­Z, то есть нужно сложить число путей, ведущих из A во все города, откуда можно приехать в город X
6. поскольку в K можно приехать из Е, Д, Ж или И, поэтому

N = N­К = NД + NЕ + NЖ + NИ

1. в город И можно приехать только из Д, поэтому NИ = NД
2. в город Ж можно приехать только из Е и В, поэтому

N­Ж = NЕ + NВ

1. подставляем результаты пп. 6 и 7 в формулу п. 5:

N = NВ + 2NЕ + 2NД

1. в город Д можно приехать только из Б и В, поэтому

N­Д = NБ + NВ

так что

N = 2NБ + 3NВ + 2NЕ

1. в город Е можно приехать только из Г, поэтому N­Е = NГ так что

N = 2NБ + 3NВ + 2NГ

1. по схеме видно, что NБ = NГ = 1, кроме того, NВ = 1 + N­Б + NГ = 3
2. окончательно N = 2NБ + 3NВ + 2NГ  = 2·1 + 3·3 + 2·1 = 13
3. Ответ: 13.

**Решение (2 вариант, удобная форма записи):**

1. начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К
2. записываем для каждой вершины, из каких вершин можно в нее попасть

|  |  |
| --- | --- |
| вершина | откуда? |
| К | ИДЖЕ |
| И | Д |
| Ж | ВЕ |
| Е | Г |
| Д | БВ |
| Г | А |
| В | АБГ |
| Б | А |

К ← ИДЖЕ

И ← Д

Ж ← ВЕ

Е ← Г

Д ← БВ

Г ← А

В ← АБГ

Б ← А

1. теперь для удобства «обратного хода» вершины можно отсортировать так[[1]](#footnote-1), чтобы сначала шли все вершины, в которые можно доехать только из начальной точки А:

Б ← А

Г ← А

затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

В ← АБГ

Е ← Г

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| вершина | откуда? | N |
| Б | А | 1 |
| Г | А | 1 |
| В | АБГ | 3 |
| Е | Г | 1 |
| Д | БВ | 4 |
| Ж | ВЕ | 4 |
| И | Д | 4 |
| К | ИДЖЕ | 13 |

далее добавляем все вершины, куда можно доехать из А, Б, Г, В и Е:

Д ← БВ

Ж ← ВЕ

на следующем шаге добавляем вершину И

И ← Д

и, наконец, конечную. вершину

К ← ИДЖЕ

именно в таком порядке мы и будем вычислять количество путей для каждой вершины

1. теперь идем по полученному списку вершин, полагая, что количество вариантов попасть в вершину равно суммарному количеству вариантов попасть в ее непосредственных предшественников.

NБ = 1, NГ = 1

NВ = 1+1+1 = 3, NЕ = 1

NД = 1+3 = 4, NЖ = 3 + 1 = 4

NИ = 4,

N = NК = 4 + 4 + 4 + 1 = 13

1. заметим, что вершины можно и не сортировать специально, а просто выбирать возможный порядок вычисления: проверять, какие значения известны и какие можно рассчитать с их помощью на следующем шаге
2. Ответ: 13.

|  |
| --- |
| **Возможные ловушки и проблемы**:   * + очень важна аккуратность и последовательность; сначала идем от конечной точки к начальной, выписывая все вершины, из которых можно приехать в данную; затем идем обратно, определяя числовые значения   + построение полного дерева маршрутов – занятие трудоемкое и достаточно бесперспективное, даже грамотные учителя информатики здесь в большинстве случаев что-то забывают и ошибаются |

**Решение (3 вариант, перебор вершин по алфавиту):**

|  |  |
| --- | --- |
| вершина | откуда? |
| Б | А |
| В | АБГ |
| Г | А |
| Д | БВ |
| Е | Г |
| Ж | ВЕ |
| И | Д |
| К | ИДЖЕ |

1. Запишем вершины в алфавитном порядке и для каждой из них определим, из каких вершин можно в нее попасть

Б ← А

В ← АБГ

Г ← А

Д ← БВ

Е ← Г

Ж ← ВЕ

И ← Д

К ← ИДЖЕ

1. теперь определяем количество путей; сначала ставим 1 для тех вершин, в которые можно проехать только из начальной (А):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| вершина | откуда? | N |
| Б | А | 1 |
| В | АБГ |  |
| Г | А | 1 |
| Д | БВ |  |
| Е | Г |  |
| Ж | ВЕ |  |
| И | Д |  |
| К | ИДЖЕ |  |

1. затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| вершина | откуда? | N |
| Б | А | 1 |
| В | АБГ | 3 |
| Г | А | 1 |
| Д | БВ |  |
| Е | Г | 1 |
| Ж | ВЕ |  |
| И | Д |  |
| К | ИДЖЕ |  |

1. следующий шаг

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| вершина | откуда? | N |
| Б | А | 1 |
| В | АБГ | 3 |
| Г | А | 1 |
| Д | БВ | 4 |
| Е | Г | 1 |
| Ж | ВЕ | 4 |
| И | Д |  |
| К | ИДЖЕ |  |

1. и последние 2 шага

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| вершина | откуда? | N |
| Б | А | 1 |
| В | АБГ | 3 |
| Г | А | 1 |
| Д | БВ | 4 |
| Е | Г | 1 |
| Ж | ВЕ | 4 |
| И | Д | 4 |
| К | ИДЖЕ | 13 |

1. Ответ: 13.

**Решение (4 вариант, перебор всех путей с начала, А. Яфарова):**

1. запишем все вершины, в которые есть прямой путь из вершины A: Б, В и Г; получается три начальных отрезка:

АБ, АВ, АГ

1. рассмотрим маршрут АБ: из Б можно ехать в В и Д, поэтому получаем два маршрута:

АБ***В***, АБ***Д***

1. рассматриваем конечные точки этих маршрутов: из В можно ехать в Д и Ж, а из Д – в И и К:

АБВ***Д***, АБВ***Ж***, АБД***И***, АБД***К***

1. снова смотрим на конечные точки: из Д едем в И и К, из Ж и И – только в К:

АБВД***И***, АБВД***К***, АБВЖ***К***, АБДИ***К***, АБДК

1. из И едем только в К, таким образом, все возможные маршруты, содержащие участок АБ, доведены до конечной точки К, всего **5 таких маршрутов**:

АБВДИ***К***, АБВДК, АБВЖК, АБДИК, АБДК

1. затем аналогично рассматриваем маршруты, которые начинаются с АВ:

АВД, АВЖ

АВДИ, АВДК, АВЖК

АВДИК, АВДК, АВЖК

всего **3 маршрута**

1. наконец, остается рассмотреть маршруты, которые начинаются с АГ:

АГВ, АГЕ

АГВД, АГВЖ, АГЕЖ, АГЕК

АГВДИ, АГВДК, АГВЖК, АГЕЖК, АГЕК

АГВДИК, АГВДК, АГВЖК, АГЕЖК, АГЕК

всего **5 маршрутов**

1. складываем количество маршрутов для всех начальных участков: 5 + 3 + 5 = 13
2. Ответ: 13.

|  |
| --- |
| **Возможные проблемы**:   * + при большом количестве маршрутов легко запутаться и что-то пропустить |

**Решение (5 вариант, графический, О.О. Грущак, КузГПА):**

1. Главную идею решения: (число дорог в город N есть сумма дорог, приводящих в города, из которых есть прямой проезд в город N), отразим на самой схеме, показывая на ней ЧИСЛО ДОРОГ, приводящих в каждый город.
2. Последовательность очевидна: начинаем с Б и Г (городов, куда есть по 1-й дороге из А)

В

А

К

Е

Д

Ж

И

1. Посчитаем дороги в В: 1 (из A)+ 1(дороги города Б)+ 1(дороги города В)= 3

А

К

Е

Д

Ж

И

1. Аналогично посчитаем дороги в Д, И, Е, Ж:

А

1. Определяем число дорог в город К, как сумму дорог в города, с которыми он связан: Д, И, Ж, Е.

А

1. Ответ: 13.

### 

1. Такая процедура называется *топологической сортировкой графа*. [↑](#footnote-ref-1)